Tài liệu bài giảng **(Khóa Toán 10)**

BG9. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN (P3)

Thầy Đặng Việt Hùng – www.facebook.com/Lyhung95

VIDEO BÀI GIẢNG và LỜI GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP chỉ có tại website MOON.VN

Ví dụ 1: **[ĐVH].** Cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=5$. Viết phương trình đường thẳng đi qua $M\left(3;\frac{1}{3}\right)$ và cắt (C) tại hai điểm *A*, *B* sao cho $AB=\sqrt{10}$.

Đ/s: $x-3y-2=0$

Ví dụ 2: **[ĐVH].** Cho đường tròn $(C):(x+4)^2+(y-3)^2=25$ và Δ: $3x-4y+10=0$. Lập pt đường thẳng *d* vuông góc với Δ và cắt (C) tại *A*, *B* sao cho $AB=6$.

Đ/s: $c=27$; $c=-13$.

Ví dụ 3: **[ĐVH].** Cho đường tròn $(C):(x+1)^2+y^2=10$. Viết phương trình đường thẳng đi qua *M*(3; 3) và cắt (C) tại hai điểm *A*, *B* sao cho $MB=3MA$.

Đ/s: $2x-y-3=0$

Ví dụ 4: **[ĐVH].** Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho đường tròn $(C):x^2+y^2+2x-8y-8=0$. Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng *d*: $3x+y-2=0$ và cắt đường tròn theo một dây cung có độ dài bằng 6.

Ví dụ 5: **[ĐVH].** Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, viết phương trình đường tròn (*C*) qua 3 điểm *A*(2; 3), *B*(4; 5), *C*(4; 1). Chứng tỏ điểm *K*(5; 2) thuộc miền trong của đường tròn (*C*). Viết phương trình đường thẳng *d* qua điểm *K* sao cho *d* cắt (*C*) theo dây cung *AB* nhận *K* làm trung điểm.

Ví dụ 6: **[ĐVH].** Cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=9$. Viết phương trình đường thẳng qua *A*(2; 1), cắt (*C*) tại *E*, *F* sao cho *A* là trung điểm của *EF*.

Ví dụ 7: **[ĐVH].** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy* cho đường tròn $(C):x^2+y^2-2x-6y+6=0$ và điểm *M*(2; 4).

a) Chứng minh rằng điểm *M* nằm trong đường tròn.

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm *M*, cắt đường tròn tại hai điểm *A* và *B* sao cho *M* là trung điểm của *AB*.

c) Viết phương trình đường tròn đối xứng với đường tròn đã cho qua đường thẳng *AB*.

Đ/s: b) $x-y+2=0$

Ví dụ 8: **[ĐVH].** Cho đường tròn $(C):x^2+(y+1)^2=9$. Viết phương trình đường thẳng đi qua *M*(1; 3) và cắt (*C*) tại hai điểm *A*, *B* sao cho *AB* ngắn nhất và nhỏ nhất.

Ví dụ 9: **[ĐVH].** Cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=40$ có tâm I và đường thẳng $\Delta: x+(m-1)y+2m+3=0.$ Tìm m để Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB bằng $6\sqrt{11}.$

Đ/s: $m=0; m=2; m=1\pm\frac{\sqrt{77}}{11}.$

Ví dụ 10: **[ĐVH].** **(Khối A – 2009).**

Cho đường tròn $(C): x^2+y^2+4x+4y+6=0$ và đường thẳng Δ: $x + my - 2m + 3 = 0$. Tìm m để đường Δ cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất.

Đ/s: $m=0; m=\frac{8}{15}.$

Ví dụ 11: **[ĐVH].** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: y-1=0; d_2: \sqrt{3}x-y+1=0$. Lập phương trình dường tròn (C) tiếp xúc với d_2 tại A, cắt d_1 tại B, C sao cho tam giác ABC vuông tại C và diện tích tam giác ABC bằng $\frac{3\sqrt{3}}{2}.$

Đ/s: $R=\sqrt{3}; A(1;\sqrt{3}+1)$.

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho đường tròn và đường thẳng $\begin{cases}(C):(x-1)^2+(y-1)^2=9\\ \Delta:(m+1)x+my-1=0\end{cases}$

a) Chứng minh rằng Δ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B.

b) Tìm m để độ dài đoạn AB luôn đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất?

Lời giải

a) (C) có tâm $I(1;1), R=3$

Đường thẳng Δ luôn đi qua điểm $M(1;-1)$ mặt khác M nằm trong đường tròn vì $IM=2<R=3$

Do vậy Δ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B.

b) Ta có $AB=2\sqrt{R^2-d^2(I;\Delta)}$ lớn nhất khi và chỉ khi $d(I;\Delta)=0$ hay AB là đường kính

hay Δ đi qua I $\Leftrightarrow (m+1)+m-1=0 \Leftrightarrow m=0$

AB nhỏ nhất khi và chỉ khi $d(I;\Delta)$ lớn nhất. Mặt khác $d(I;\Delta)\le IM$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow IM\perp\Delta$

Khi đó $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{u_\Delta}=0 \Leftrightarrow m=-1$

Bài 2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm $M(6; 2)$ và đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=5$

Lập phương trình đường thẳng d qua M và cắt (C) tại 2 điểm A; B sao cho $MA^2+MB^2=50.$

Lời giải

Gọi H là trung điểm của AB. Ta có: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}\right)\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HB}\right)$

$=\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}\right)\left(\overrightarrow{MH}-\overrightarrow{HA}\right)=MH^2-HA^2=\left(MH^2+HI^2\right)-\left(HA^2+HI^2\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - R^2$ (đây chính là tích chất của phương tích (SGK 10))

Dễ thấy M nằm ngoài đường tròn ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MA.MB = MI^2 - R^2 = 20$

Kết hợp giả thiết ta có: $(MA - MB)^2 = 10 \Rightarrow AB^2 = 10 \Rightarrow d(I;AB) = \sqrt{R^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

Gọi $AB: a(x-6) + b(y-2) = 0 \Rightarrow \frac{|-5a|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow 9a^2 = b^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a = b \\ 3a = -b \end{array}\right. \; (a^2 + b^2 > 0)$

Với $3a = b$ chọn $a = 1, b = 3 \Rightarrow AB: x + 3y - 12 = 0$

Với $3a = -b$ chọn $a = 1, b = -3 \Rightarrow AB: x - 3y = 0$

Bài 3. Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy* cho điểm *M*(2; 3) và đường tròn $(C): (x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$

Lập phương trình đường thẳng *d* qua *M* và cắt (*C*) tại 2 điểm *A; B* sao cho $MA^2 + MB^2 = 18$.

Lời giải

Tương tự bài trên:

Dễ thấy M nằm ngoài đường tròn ta có: $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MA.MB = MI^2 - R^2 = 1$

Kết hợp giả thiết ta có: $(MA - MB)^2 = 16 \Rightarrow AB^2 = 16 \Rightarrow d(I;AB) = \sqrt{R^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 5$

Gọi $AB: a(x-2) + b(y-3) = 0 \Rightarrow \frac{|-3a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow 5a^2 + 5b^2 = 9a^2 + 6ab + b^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -2b \\ 2a = b \end{array}\right. \; (a^2 + b^2 > 0)$

Với $a = -2b$ chọn $b = -1, a = 2 \Rightarrow AB: 2x - y - 1 = 0$

Với $2a = b$ chọn $a = 1, b = 2 \Rightarrow AB: x + 2y - 8 = 0$

Đ/s: $2x - y - 1 = 0; x + 2y - 8 = 0$.

Bài 4. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ và điểm *M*(2; 4).

Viết phương trình đường thẳng đi qua *M* cắt đường tròn tại 2 điểm *A* và *B*, sao cho *M* là trung điểm của *AB*.

Lời giải

Ta có $I(1;3), R = 2$. Tam giác IAB cân tại I do đó ta có: $IM \perp AB$

$\overrightarrow{n_{AB}} = (1;1) \Rightarrow AB: x + y - 6 = 0$

Vậy $AB: x + y - 6 = 0$

Bài 5. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 2my + m^2 - 24 = 0$ có tâm *I* và đường thẳng Δ: *mx* + 4*y* = 0. Tìm *m* biết đường thẳng Δ cắt đường tròn (*C*) tại hai điểm phân biệt *A*, *B* thỏa mãn diện tích tam giác *IAB* bằng 12.

Lời giải

Ta có *(C)* có tâm $I(1;m), R^2 = 1 + m^2 - m^2 + 24 = 25 \Rightarrow R = 5$, $AB = 2\sqrt{R^2 - d^2(I;AB)} = 2\sqrt{25 - d^2}$

Mặt khác $S_{IAB} = \frac{1}{2}AB.d = \sqrt{25 - d^2}.d = 12 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d = 3 \\ d = 4 \end{array}\right.$

+) Với $d = 3 \Rightarrow \dfrac{|5m|}{\sqrt{m^2+16}} = 3 \Leftrightarrow 16 = \dfrac{16}{9}m^2 \Leftrightarrow m = \pm 3$

+) Với $d = 3 \Rightarrow \dfrac{|5m|}{\sqrt{m^2+16}} = 4 \Leftrightarrow 16 = \dfrac{9}{16}m^2 \Leftrightarrow m = \pm\dfrac{16}{3}$

Đ/s: $m = \pm 3; m = \pm\dfrac{16}{3}$.

Bài 6. Cho đường tròn $(C): x^2 + (y-3)^2 = 9$ và đường thẳng Δ: $x + (m-1)y + 2 - m = 0$.

Tìm *m* để đường Δ cắt (*C*) tại hai điểm *A*, *B* sao cho tam giác *IAB* có diện tích lớn nhất.

Lời giải

Ta có $S_{IAB} = \dfrac{1}{2}IA.IB\sin\widehat{AIB} \le \dfrac{1}{2}IA.IB = \dfrac{R^2}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác *AIB* vuông cân tại *I*

Khi đó $d(I;AB) = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{R}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \dfrac{|3(m-1)+2-m|}{\sqrt{1+(m-1)^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2(2m-1)^2 = 9(m^2-2m+2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=8 \\ m=2 \end{array}\right.$

Vậy $m = 8, m = 2$ là giá trị cần tìm.

Bài 7. Cho đường tròn $(C): x^2 + (y+2)^2 = 25$ và đường thẳng *d*: $x + 5y - 7 = 0$.

Gọi *A*, *B* là các giao điểm của đường thẳng và đường tròn, tính diện tích tam giác *IAB*.

Lời giải

Tọa độ điểm *A*,*B* là nghiệm của HPT sau: $\begin{cases} x^2+(y+2)^2 = 25 \\ x+5y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (7-5y)^2+(y+2)^2 = 25 \\ x = 7-5y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3, y=2 \\ x=\dfrac{56}{13}; y=\dfrac{7}{13} \end{array}\right.$

Vậy $A(-3;2), B\left(\dfrac{56}{13};\dfrac{7}{13}\right)$, $S_{IAB} = \dfrac{1}{2}AB.d(I;AB) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{722}{13}}.\dfrac{|-17|}{\sqrt{26}} = \dfrac{323}{26}$

Bài 8. Cho đường tròn $(C): (x+1)^2 + y^2 = 13$ và đường thẳng *d*: $5x - y - 8 = 0$.

Gọi *A*, *B* là các giao điểm của đường thẳng và đường tròn, tính diện tích tam giác *IAB*.

Lời giải

Tọa độ điểm *A*,*B* là nghiệm của hệ $\begin{cases} (x+1)^2+y^2 = 13 \\ 5x-y-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2+(5x-8)^2 = 13 \\ y = 5x-8 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=-3 \\ x=2; y=2 \end{array}\right.$

Vậy $A(1;-3), B(2;2)$, $S_{IAB} = \dfrac{1}{2}AB.d(I;AB) = \dfrac{1}{2}\sqrt{26}.\dfrac{|13|}{\sqrt{26}} = \dfrac{13}{2}$

Bài 9. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ và điểm *A*(1; 0). Viết phương trình đường thẳng *d* cắt (*C*) tại hai điểm *M*, *N* sao cho tam giác *AMN* vuông cân tại *A*.

Lời giải

Gọi *H* là trung điểm của *MN* khi đó tam giác *AMN* vuông cân tại *A* nên $AM = AN$

Mặt khác $I(1;-2)$, $IM = IN = R$ nên $AI \perp MN \Rightarrow \overrightarrow{n_{MN}} = \overrightarrow{AI} = (0;2) \Rightarrow MN: y = m$

Tọa độ M,N là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = m \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = m \\ x = 1 \pm \sqrt{10-(m+2)^2} \end{cases}$;$(m+2)^2 < 10$

Khi đó $M\left(1+\sqrt{6-m^2-4m};m\right), N\left(1-\sqrt{6-m^2-4m};m\right) \Rightarrow \overrightarrow{AM}\left(\sqrt{6-m^2-4m};m\right), \overrightarrow{AN}\left(-\sqrt{6-m^2-4m};m\right)$

Theo giả thiết $\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 6 + m^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -3 \end{array}\right.$

Đ/s: $y = 1$ và $y = -3$.

Bài 10. Cho đường tròn $(C): x^2 + (y+1)^2 = 9$ và điểm $A(1; -2)$. Viết phương trình đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm M, N sao cho tam giác AMN có trọng tâm là I, với I là tâm của đường tròn.

Lời giải

Gọi $H(a;b)$ là trung điểm của MN ta có: $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 = \frac{3}{2}(0-1) \\ b + 2 = \frac{3}{2}(-1+2) \end{cases} \Rightarrow H\left(-\frac{1}{2};\frac{-1}{2}\right)$

Đường thẳng MN đi qua H và nhận vecto pháp tuyến $\vec{n} = -2\overrightarrow{IH} = (1;-1)$

Vậy $MN: x - y = 0$

Bài 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: \sqrt{3}x + y = 0; d_2: \sqrt{3}x - y = 0$. Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A, cắt d_2 tại hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình của (T), biết tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.

Lời giải

Gọi $A\left(a;-a\sqrt{3}\right)$ $(a > 0)$. PT đường thẳng AC qua A và vuông góc với d_1 là: $x + \sqrt{3}y + 2a = 0$

$B = AB \cap d_2 = \left(\frac{-a}{2};\frac{-a\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}BA.BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow BA.BC = \sqrt{3} \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow A\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-1\right), C\left(\frac{-2}{\sqrt{3}};-2\right)$

Tâm đường tròn $I\left(2\frac{-1}{2\sqrt{3}};\frac{-3}{2}\right), R = IA = 1 \Rightarrow (T): \left(x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 1$

Bài 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $B\left(\frac{1}{2};1\right)$. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các điểm D, E, F. Cho $D(3; 1)$ và đường thẳng EF có phương trình $y = 3$. Tìm tọa độ đỉnh A, biết A có tung độ dương.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{BD}\left(\frac{5}{2};0\right) \Rightarrow BD \parallel EF \Rightarrow$ tam giác ABC cân tại A.

Do đó AD là phân giác đồng thời là đường cao $EF: x = 3 \Rightarrow F(t;3)$

Mặt khác $BF = BD \Rightarrow \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right.$

+) Với $t = -1 \Rightarrow F(-1;3) \Rightarrow BF: 4x + 3y - 5 = 0 \Rightarrow A = AD \cap BF = \left(3; \frac{-7}{3}\right)$ (loại)

+) Với $t = 2 \Rightarrow F(2;3) \Rightarrow BF: 4x - 3y + 1 = 0 \Rightarrow A\left(3; \frac{13}{3}\right)$ (thõa mãn)