

Tài liệu bài giảng (Pro S.A.T)
13. BÀI TOÁN QUÃNG ĐƯỜNG LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT
 Thầy Đặng Việt Hùng – www.facebook.com/Lyhung95

VIDEO BÀI GIẢNG và LỜI GIẢI CHI TIẾT CÁC BÀI TẬP chỉ có tại website MOON.VN

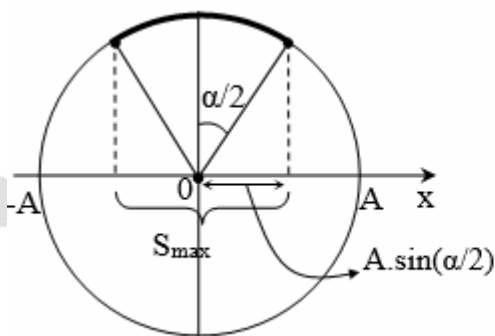
Bài toán 1: Một chất điểm dao động điều hòa, cho quãng thời gian t bất kỳ. Tìm quãng đường lớn nhất, nhỏ nhất chất điểm đi được trong quãng thời gian đó.

Cách giải:

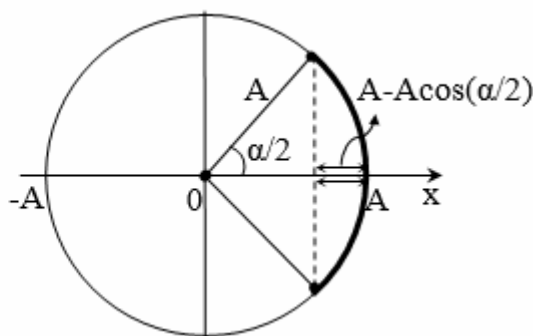
• **TH₁:** Với $t \leq T/2 \Rightarrow \alpha = \omega t < \pi$.

Quãng đường S là hình chiếu của cung α xuống Ox.

Do cùng một khoảng thời gian t , muốn quãng đường lớn nhất thì tốc độ phải lớn nhất, mà tốc độ càng lớn khi vật đi gần vtcb (quãng đường đối xứng qua vtcb). Quãng đường nhỏ nhất, ứng với hai rìa biên có tốc độ nhỏ nhất.



Cung α đối xứng qua trục tung
 $S_{\max} = 2A \cdot \sin(\alpha/2)$



Cung α đối xứng qua trục hoành
 $S_{\min} = 2A \cdot [1 - \cos(\alpha/2)]$

Bảng tính nhanh các giá trị quãng đường max, min với khoảng thời gian đặc biệt

Δt	$\frac{T}{6}$	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{3}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{2T}{3}$	$\frac{3T}{4}$	$\frac{5T}{6}$	T
S_{\max}	A	$A\sqrt{2}$	$A\sqrt{3}$	$2A$	$2A + A$	$2A + A\sqrt{2}$	$2A + A\sqrt{3}$	$4A$
S_{\min}	$2A - A\sqrt{3}$	$2A - A\sqrt{2}$	A	$2A$	$4A - A\sqrt{3}$	$4A - A\sqrt{2}$	$3A$	$4A$

• **TH₂:** Với $t > T/2$.

Tách $t = k \cdot T/2 + \Delta t$ ($\Delta t < T/2$),

$S_{\max} = k \cdot 2A + \Delta S_{\max}$; $S_{\min} = k \cdot 2A + \Delta S_{\min}$.

Với $\Delta S_{\max} = 2A \cdot \sin(\alpha/2)$ và $\Delta S_{\min} = 2A \cdot [1 - \cos(\alpha/2)]$.

Bài toán 2: Tính thời gian ngắn nhất và dài nhất khi xét cùng độ dài quãng đường S .

Cách giải:

Vật dao động điều hoà có tốc độ càng lớn khi vật càng gần vị trí cân bằng và tốc độ càng nhỏ khi vật càng gần vị trí biên nên trong cùng quãng đường, khoảng thời gian sẽ dài khi vật đi gần vị trí biên. Khoảng thời gian sẽ ngắn khi vật đi xung quanh gần vị trí cân bằng.

• **TH₁:** Nếu $S < 2A$ ta có:

Thời gian ngắn nhất vật đi được quãng đường S : $S = 2A \sin \frac{\Delta\varphi_{\min}}{2} = 2A \sin \frac{\omega \cdot \Delta t_{\min}}{2}$.

Thời gian dài nhất vật đi được quãng đường S: $S = 2A \left(1 - \cos \frac{\Delta\phi_{\max}}{2} \right) = 2A \left(1 - \cos \frac{\omega \Delta t_{\max}}{2} \right)$.

• **TH2:** Nếu $S > 2A \Rightarrow S = n \cdot 2A + S' \Rightarrow \Delta t = n \frac{T}{2} + \Delta t' (S' < 2A)$.

Khi đó ta tìm $\Delta t'_{\min}$ hoặc $\Delta t'_{\max}$ như trường hợp 1.

Ví dụ 1: Một vật dao động điều hoà với phương trình $x = 5 \cos \left(\pi t - \frac{2\pi}{3} \right)$ (cm). Tính quãng đường lớn nhất, nhỏ nhất vật đi được.

a) Trong khoảng thời gian $\Delta t = \frac{4}{3}$ (s).

b) Trong khoảng thời gian $\Delta t = \frac{14}{3}$ (s).

Lời giải:

a) Ta có chu kỳ dao động của vật là: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2$ s.

Khi đó: $\Delta t = \frac{2T}{3} = \frac{T}{2} + \frac{T}{6} = \frac{T}{2} + \frac{T}{12} + \frac{T}{12}$

Quãng đường lớn nhất vật đi được là: $S_{\max} = 2A + \frac{A}{2} + \frac{A}{2} = 3A = 15$ cm.

Quãng đường nhỏ nhất vật đi được là: $S_{\min} = 2A + 2 \left(A - \frac{A\sqrt{3}}{2} \right) = 11,34$ cm.

b) Ta có: $\Delta t = \frac{14}{3}$ (s) $= 2T + \frac{T}{3} = 2T + \frac{T}{6} + \frac{T}{6}$

Quãng đường lớn nhất vật đi được là: $S_{\max} = 2 \cdot 4A + A\sqrt{3} = 48,66$ cm.

Quãng đường nhỏ nhất vật đi được là: $S_{\min} = 8A + 2 \left(A - \frac{A}{2} \right) = 45$ cm.

Ví dụ 2: Một vật dao động điều hoà với phương trình $x = 6 \cos \left(\frac{4\pi t}{3} + \frac{\pi}{6} \right)$ (cm).

a) Tính quãng đường lớn nhất vật đi được trong khoảng thời gian 7 s.

b) Tính quãng đường ngắn nhất vật đi được trong khoảng thời gian 5,625 s.

Lời giải:

a) Chu kỳ dao động của vật là: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 1,5$ s.

Khi đó: $7 = 9 \frac{T}{2} + \frac{T}{6} = \frac{9T}{2} + \frac{T}{12} + \frac{T}{12}$

Quãng đường lớn nhất vật đi được là: $S_{\max} = 9 \cdot 2A + A = 114$ cm.

b) Ta có: $5,625$ s $= \frac{7T}{2} + \frac{T}{4} = \frac{7T}{2} + \frac{T}{8} + \frac{T}{8}$

Quãng đường nhỏ nhất vật đi được là: $S_{\min} = 7 \cdot 2A + 2 \left(A - \frac{A\sqrt{2}}{2} \right) = 87,51$ cm.

Ví dụ 3: Một vật dao động điều hoà với biên độ bằng 10 cm. Quãng đường nhỏ nhất vật đi được trong 1,5 s là 30 cm. Tính tốc độ của vật tại thời điểm vật kết thúc quãng đường.

Lời giải:

Ta có $S_{\min} = 30\text{cm} = 3A = 2A + A \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{2} + \Delta t'$

Trong khoảng thời gian $\Delta t'$ vật đi được $S_{\min} = A$ nên dễ dàng suy ra

$$\Delta t' = \frac{T}{3} \Rightarrow 1,5 = \frac{T}{2} + \frac{T}{3} = \frac{5T}{6} \Rightarrow T = 1,8(\text{s})$$

Kết thúc quãng đường vật dừng lại ở tọa độ $\pm \frac{A}{2} \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2} \omega A = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2\pi}{1,8} \cdot 10 = 30,229(\text{cm/s})$

Ví dụ 4: Một vật dao động điều hòa với biên độ bằng 4 cm. Trong khoảng thời gian lớn nhất 2 s vật đi được quãng đường 15 cm. Tính chu kỳ, tần số dao động của vật?

Lời giải:

Với các bài toán dạng này (đề thi hay khai thác), các em cần để ý chi tiết quãng đường đã vượt 2A hay chưa, nếu chưa thì áp dụng trực tiếp công thức, còn không thì phải tách nhỏ theo 2A và 4A nhé.

Ta có t_{\max} nên $S = S_{\min}$; tức là $S_{\min} = 15\text{cm} = 2A + 7 = 2A + S'_{\min} \Rightarrow 2(\text{s}) = \frac{T}{2} + \Delta t$

Xét riêng: $S'_{\min} = 7\text{cm} = 2A \left(1 - \cos \frac{\Delta\phi}{2}\right) \Rightarrow \Delta\phi = 2,89(\text{rad}) = \omega \cdot \Delta t = \frac{2\pi}{T} \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = 0,46T$

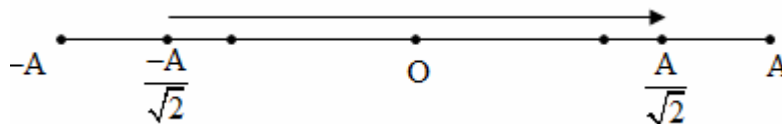
Từ đó ta dễ có $2(\text{s}) = \frac{T}{2} + 0,46T \Rightarrow T = 2,083(\text{s}); f = 0,48(\text{Hz})$

Ví dụ 5: Một vật dao động điều hoà với phương trình $x = 10 \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ cm . Quãng đường lớn nhất mà vật đi được trong khoảng thời gian 1,875 là :

- A. 150 cm. B. 152 cm. **C. 154 cm.** D. 155 cm.

Lời giải:

Ta có: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,5 \text{ s}; \frac{\Delta t}{T} = \frac{1,875}{0,5} = \frac{15}{4} \Rightarrow \Delta t = 7 \frac{T}{2} + \frac{T}{4} \Rightarrow S_{\max} = 7 \cdot 2A + S'_{\max}\left(\frac{T}{4}\right)$



Mặt khác $\frac{T}{4} = \frac{T}{8} + \frac{T}{8}$. Dựa vào trục thời gian $\Rightarrow S'_{\max} = A\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \Rightarrow S_{\max} = 140 + 10\sqrt{2} = 154 \text{ cm}$.

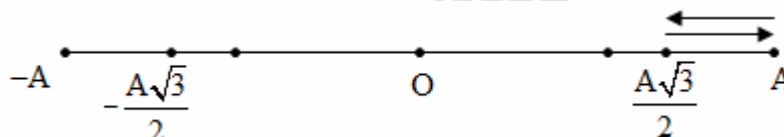
Chọn C.

Ví dụ 6: Một vật dao động điều hoà với phương trình $x = 5 \cos\left(\frac{5\pi t}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$ (cm). Quãng đường ngắn nhất mà vật đi được trong khoảng thời gian 7,4 s là:

- A. 127,5 cm. B. 123 cm. C. 130 cm. **D. 121,34 cm.**

Lời giải:

Ta có: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 1,2 \text{ s}, \frac{\Delta t}{T} = \frac{7,4}{1,2} = \frac{37}{6} \Rightarrow \Delta t = 12 \cdot \frac{T}{2} + \frac{T}{6} = 12 \cdot \frac{T}{2} + \frac{T}{12} + \frac{T}{12}$



Dựa vào trục thời gian suy ra $S'_{\min} = 2 \left(A - \frac{A\sqrt{3}}{2} \right)$

Do đó $S_{\max} = 12.2A + S'_{\min} = 24A + 2A - A\sqrt{3} = 121,34 \text{ cm}$. **Chọn D.**

Ví dụ 7: Vật dao động điều hòa với phương trình $x = 5\cos(4\pi t + \pi/6)$ cm. Tìm quãng đường lớn nhất vật đi được trong khoảng thời gian $T/4$.

- A. 5 cm. **B. $5\sqrt{2}$ cm.** C. $5\sqrt{3}$ cm. D. 10 cm.

Lời giải:

Góc quay được trong $T/4$: $\alpha = \pi/2$ rad.

Áp dụng công thức tính S_{\max} và S_{\min} :

$S_{\max} = 2A.\sin(\alpha/2) = 2.5.\sin(\pi/4) = 5\sqrt{2}$ cm. **Chọn B.**

Ví dụ 8: Một chất điểm đang dao động điều hòa với biên độ bằng 6 cm và chu kỳ bằng 1,5 s. Quãng đường dài nhất và ngắn nhất mà vật đi được trong cùng một quãng thời gian bằng 5 s lần lượt là

- A. 72 cm; 78 cm. **B. $36 + 6\sqrt{3}$ cm; 42 cm.**
C. $72 + 6\sqrt{3}$ cm; 78 cm. D. 78 cm; $78 + 6\sqrt{2}$ cm.

Lời giải:

Chu kỳ $T = 1,5 \text{ s} \Rightarrow T/2 = 0,75 \text{ s}$ và $\omega = 4\pi/3 \text{ rad/s}$.

Tách $t = 5\text{s} = 6.0,75 + 0,5 \text{ s} \Rightarrow \alpha = 6.\pi + 2\pi/3 \text{ rad}$.

$S_{\max} = 6.12 + 2.6.\sin(\pi/3) = 72 + 6\sqrt{3}$ cm.

$S_{\min} = 6.12 + 2.6.[1 - \cos(\pi/3)] = 78$ cm. **Chọn C.**

Ví dụ 9: Một chất điểm dao động điều hòa với biên độ bằng 8 cm. Xét trong cùng một độ dài thời gian như nhau, nếu chất điểm đi được quãng đường ngắn nhất bằng 6 cm thì quãng đường dài nhất mà chất điểm đi được trong quá trình dao động xấp xỉ bằng

- A. 15,5 cm. **B. $12 + 4\sqrt{2}$ cm.** C. 12 cm. **D. 12,5 cm.**

Lời giải:

Do $S_{\max}, S_{\min} < 2A$, nên $S_{\min} = 2A.[1 - \cos(\alpha/2)] \leftrightarrow 6 = 2.8.[1 - \cos(\alpha/2)] \Rightarrow \alpha/2 = 51,31^\circ$.

$S_{\max} = 2A.\sin(\alpha/2) = 2.8.\sin(51,3^\circ) = 12,5$ cm. **Chọn D.**

Ví dụ 10: Một vật nhỏ đang dao động điều hòa, biết rằng khoảng thời gian dài nhất giữa hai lần liên tiếp vật đi qua vị trí có li độ bằng A/n đúng bằng khoảng thời gian trong đó vật đi được quãng đường dài nhất là $3A$. Giá trị của n là

- A. $n = 2$.** B. $n = 1/2$. C. $n = \sqrt{3}/2$. D. $n = 2/\sqrt{3}$.

Lời giải:

Ta có $S_{\max} = k.2A + 2A.\sin(\alpha/2) = 3A$

$\Rightarrow k = 1$ và $\alpha = \pi/3 \Rightarrow t = 1. \frac{T}{2} + \frac{\alpha}{\omega} = \frac{T}{2} + \frac{T}{6} = \frac{2T}{3} \text{ s}$

(cứ đi được $2A$ hết $T/2$ s).

Kh \square ang thời gian đi trong đoạn đường $3A$ trên bằng với kh \square ang thời gian giữa hai lần liên tiếp đi qua li độ $A/n = t = 2T/3 \text{ s}$.

$\Rightarrow \alpha_2 = \omega.t = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{2T}{3} = \frac{4\pi}{3} \text{ rad}$.

Q \square ang thời gian t dài nhất ứng với α_2 là cung lớn trên đường tròn.

\Rightarrow cung nhỏ $\alpha_1 = 2\pi/3$ rad.

$\Rightarrow \varphi = \pi/3 \Rightarrow A/n = A.\cos \pi/3 \Rightarrow n = 2$. **Chọn A.**

